Matemáticas I
Funciones elementales

Javier Pérez González

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

September 22, 2014

Concepto de función

Sean A y B dos conjuntos.

Concepto de función

Sean A y B dos conjuntos.Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de* A *asocia un* ***único*** *elemento de* B.

Concepto de función

Sean A y B dos conjuntos.Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de* A *asocia un* ***único*** *elemento de* B.Simbólicamente escribimos:

$$f : A \longrightarrow B$$

para indicar que f es una función definida en A con valores en B.

Concepto de función

Sean A y B dos conjuntos.Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de A asocia un* ***único*** *elemento de B.*Simbólicamente escribimos:

$$f : A \longrightarrow B$$

para indicar que f es una función definida en A con valores en B.

El conjunto A recibe el nombre de ***dominio*** de la función.

Concepto de función

Sean A y B dos conjuntos.Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de A asocia un* ***único*** *elemento de B.*Simbólicamente escribimos:

$$f : A \longrightarrow B$$

para indicar que f es una función definida en A con valores en B.

El conjunto A recibe el nombre de ***dominio*** de la función.

Las funciones cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y que toman valores reales se llaman *funciones reales*. Son las que vamos a considerar en todo lo que sigue.

Concepto de función

Sean A y B dos conjuntos.Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de A asocia un **único** elemento de B.*Simbólicamente escribimos:

$$f : A \longrightarrow B$$

para indicar que f es una función definida en A con valores en B.

El conjunto A recibe el nombre de ***dominio*** de la función.

Las funciones cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y que toman valores reales se llaman *funciones reales*. Son las que vamos a considerar en todo lo que sigue.

Simbólicamente escribiremos:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

para indicar que f es una función real definida en A.

Concepto de función

Sean A y B dos conjuntos.Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de* A *asocia un* ***único*** *elemento de* B.Simbólicamente escribimos:

$$f : A \longrightarrow B$$

para indicar que f es una función definida en A con valores en B.

El conjunto A recibe el nombre de ***dominio*** de la función.

Las funciones cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y que toman valores reales se llaman *funciones reales*. Son las que vamos a considerar en todo lo que sigue.

Simbólicamente escribiremos:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

para indicar que f es una función real definida en A.

Para cada $x \in A$ representamos por $f(x)$ el número que se obtiene evaluando f en x.

Concepto de función

Sean A y B dos conjuntos.Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de A asocia un **único** elemento de B.*Simbólicamente escribimos:

$$f : A \longrightarrow B$$

para indicar que f es una función definida en A con valores en B.

El conjunto A recibe el nombre de ***dominio*** de la función.

Las funciones cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y que toman valores reales se llaman *funciones reales*. Son las que vamos a considerar en todo lo que sigue.

Simbólicamente escribiremos:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

para indicar que f es una función real definida en A.

Para cada $x \in A$ representamos por $f(x)$ el número que se obtiene evaluando f en x. *No debes confundir una función f con uno de sus valores $f(x)$*.

Igualdad de funciones. Dominio natural

Dos funciones f y g son iguales ***cuando tienen igual dominio*** y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.

Igualdad de funciones. Dominio natural

Dos funciones f y g son iguales ***cuando tienen igual dominio*** y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.

Por ejemplo, las funciones $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$, son funciones diferentes.

Igualdad de funciones. Dominio natural

Dos funciones f y g son iguales ***cuando tienen igual dominio*** y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.

Por ejemplo, las funciones $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$, son funciones diferentes.Aunque la regla que las define es la misma “a un número se le hace corresponder su cuadrado”, su dominio es diferente.

Igualdad de funciones. Dominio natural

Dos funciones f y g son iguales ***cuando tienen igual dominio*** y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.

Por ejemplo, las funciones $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$, son funciones diferentes.Aunque la regla que las define es la misma “a un número se le hace corresponder su cuadrado”, su dominio es diferente.Estas funciones tienen distintos comportamientos: la función f no es monótona mientras que la función g es estrictamente creciente.

Igualdad de funciones. Dominio natural

Dos funciones f y g son iguales ***cuando tienen igual dominio*** y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.

Por ejemplo, las funciones $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$, son funciones diferentes.Aunque la regla que las define es la misma “a un número se le hace corresponder su cuadrado”, su dominio es diferente.Estas funciones tienen distintos comportamientos: la función f no es monótona mientras que la función g es estrictamente creciente.

El convenio del dominio

Igualdad de funciones. Dominio natural

Dos funciones f y g son iguales ***cuando tienen igual dominio*** y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.

Por ejemplo, las funciones $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$, son funciones diferentes.Aunque la regla que las define es la misma “a un número se le hace corresponder su cuadrado”, su dominio es diferente.Estas funciones tienen distintos comportamientos: la función f no es monótona mientras que la función g es estrictamente creciente.

El convenio del dominio

Cuando una función se define mediante una fórmula:

$$\boxed{f(x) = \text{fórmula}}$$

y el dominio no es explícito, se entiende que el dominio es el mayor conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la expresión $f(x)$ tiene sentido como número real. Éste es el llamado ***dominio natural*** de la función.

Por ejemplo, el dominio natural de definición de la función dada por

$$f(x) = \sqrt{\ln(x^2 - 5x + 7)}$$

es el conjunto:

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : \ln(x^2 - 5x + 7) \geqslant 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 7 \geqslant 1\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 \geqslant 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x-3)(x-2) \geqslant 0\} = \\ &=]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[\end{aligned}$$

Imagen o recorrido de una función

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Sea $C \subset A$. El conjunto $\{f(x) : x \in C\}$ de todos los valores que toma f en C se llama la imagen de C por f y se representa por $f(C)$. El conjunto $f(A)$ suele llamarse *rango o recorrido de* f, o simplemente, *la* ***imagen*** de f.

Imagen o recorrido de una función

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Sea $C \subset A$. El conjunto $\{f(x) : x \in C\}$ de todos los valores que toma f en C se llama la imagen de C por f y se representa por $f(C)$. El conjunto $f(A)$ suele llamarse *rango o recorrido de* f, o simplemente, *la* ***imagen*** de f.

Calcular el conjunto imagen de una función, es decir, todos los valores que dicha función toma, no es en general fácil de hacer. Se necesitan herramientas de Cálculo que veremos muy pronto.

Imagen o recorrido de una función

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Sea $C \subset A$. El conjunto $\{f(x) : x \in C\}$ de todos los valores que toma f en C se llama la imagen de C por f y se representa por $f(C)$. El conjunto $f(A)$ suele llamarse *rango o recorrido de f*, o simplemente, *la **imagen*** de f.

Calcular el conjunto imagen de una función, es decir, todos los valores que dicha función toma, no es en general fácil de hacer. Se necesitan herramientas de Cálculo que veremos muy pronto.Por

ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^7 - 6x^4 + 3x^2 - x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ toma todos los valores reales, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, pero si intentamos probarlo directamente no podremos porque habría que probar que la ecuación $f(x) = y$ tiene soluciones reales para todo $y \in \mathbb{R}$ y eso no es nada fácil.

Suma y producto de funciones

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se define la *función suma* $f + g : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Suma y producto de funciones

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se define la *función suma* $f+g : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

Se define la *función producto*: $fg : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

Suma y producto de funciones

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se define la *función suma* $f + g : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Se define la *función producto*: $fg : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

La suma y el producto de funciones tienen las propiedades asociativas, conmutativas y distributivas.

Suma y producto de funciones

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se define la *función suma* $f + g : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Se define la *función producto*: $fg : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

La suma y el producto de funciones tienen las propiedades asociativas, conmutativas y distributivas.

Supuesto que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$ se define la *función cociente* $\dfrac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Composición de funciones

Supongamos que $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ son funciones verificando que $f(A) \subset B$. En tal caso, la función $h : A \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$ se llama *composición de g con f* y se representa por $h = g \circ f$.

Funciones inyectivas. Función inversa

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **inyectiva** en un conjunto $C \subset A$, si en puntos distintos de C toma valores distintos; es decir, si $x, y \in C$ y $x \neq y$, entonces se verifica que $f(x) \neq f(y)$. Se dice que f es inyectiva cuando es inyectiva en A.

Funciones inyectivas. Función inversa

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **inyectiva** en un conjunto $C \subset A$, si en puntos distintos de C toma valores distintos; es decir, si $x, y \in C$ y $x \neq y$, entonces se verifica que $f(x) \neq f(y)$. Se dice que f es inyectiva cuando es inyectiva en A.

Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, puede definirse una nueva función $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ que llamaremos ***función inversa*** de f, que a cada número $y \in f(A)$ asigna el único número $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Equivalentemente $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in A$, y también $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in f(A)$.

Funciones monótonas

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **creciente** en un conjunto $C \subseteq A$, si f *conserva* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$.

Funciones monótonas

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **creciente** en un conjunto $C \subseteq A$, si f *conserva* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$.

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **decreciente** en un conjunto $C \subseteq A$, si f *invierte* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \geqslant f(y)$.

Funciones monótonas

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **creciente** en un conjunto $C \subseteq A$, si f *conserva* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$.

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **decreciente** en un conjunto $C \subseteq A$, si f *invierte* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \geqslant f(y)$.

Se dice que una función es *monótona* para indicar que es creciente o decreciente.

Funciones monótonas

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **creciente** en un conjunto $C \subseteq A$, si f *conserva* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$.

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **decreciente** en un conjunto $C \subseteq A$, si f *invierte* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \geqslant f(y)$.

Se dice que una función es *monótona* para indicar que es creciente o decreciente.Una función monótona e inyectiva se dice que es ***estrictamente monótona***, pudiendo ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Gráfica de una función. La gráfica de una función $f : A \to \mathbb{R}$ es el conjunto de pares de números $\{(x, f(x)) : x \in A\}$. Es un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$.

Gráfica de una función. La gráfica de una función $f : A \to \mathbb{R}$ es el conjunto de pares de números $\{(x, f(x)) : x \in A\}$. Es un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$.

La gráfica de una función pone de manifiesto, a simple vista, muchas de sus propiedades. Para dibujar gráficas de funciones se precisan herramientas de cálculo como las derivadas.

Funciones elementales

La mayoría de las funciones que vamos a usar en este curso pertenecen a la clase de las ***funciones elementales***.

Funciones elementales

La mayoría de las funciones que vamos a usar en este curso pertenecen a la clase de las ***funciones elementales***.Se llaman así porque pueden obtenerse a partir de ciertos tipos de funciones, que ahora vamos a recordar, realizando las operaciones de suma, producto, cociente y composición de funciones.

Funciones polinómicas

Son las funciones de la forma

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son números reales llamados *coeficientes* del polinomio; $n \in \mathbb{N}$ es un número natural que, si $c_n \neq 0$, se llama grado del polinomio.

Funciones polinómicas

Son las funciones de la forma

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son números reales llamados *coeficientes* del polinomio; $n \in \mathbb{N}$ es un número natural que, si $c_n \neq 0$, se llama grado del polinomio.

Las funciones polinómicas tienen como dominio natural de definición la totalidad de $\mathbb{R}$ aunque con frecuencia nos interesará estudiar una función polinómica en un intervalo.

Funciones racionales

Una función racional es una función de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P (el numerador) y Q (el denominador) son polinomios y Q no es el polinomio constante igual a 0.

Funciones racionales

Una función racional es una función de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P (el numerador) y Q (el denominador) son polinomios y Q no es el polinomio constante igual a 0.

La función R tiene como dominio natural de definición el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.

Funciones racionales

Una función racional es una función de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P (el numerador) y Q (el denominador) son polinomios y Q no es el polinomio constante igual a 0.

La función R tiene como dominio natural de definición el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.

Observa que las funciones polinómicas son también funciones racionales (con denominador constante 1).

Raíces y potencias racionales

Dados un número real $x \geqslant 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, hay un único número real ***mayor o igual que cero***, $z \geqslant 0$, que verifica que $z^k = x$.

Raíces y potencias racionales

Dados un número real $x \geqslant 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, hay un único número real ***mayor o igual que cero***, $z \geqslant 0$, que verifica que $z^k = x$.Dicho número real z se llama la *raíz k-ésima o de orden k de x* y se representa por $\sqrt[k]{x}$ o por $x^{1/k}$.

Raíces y potencias racionales

Dados un número real $x \geqslant 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, hay un único número real ***mayor o igual que cero***, $z \geqslant 0$, que verifica que $z^k = x$.Dicho número real z se llama la *raíz k-ésima o de orden k de* x y se representa por $\sqrt[k]{x}$ o por $x^{1/k}$.

Se verifica que $\sqrt[k]{xy} = \sqrt[k]{x}\,\sqrt[k]{y}$.

Raíces y potencias racionales

Dados un número real $x \geqslant 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, hay un único número real ***mayor o igual que cero***, $z \geqslant 0$, que verifica que $z^k = x$.Dicho número real z se llama la *raíz k-ésima o de orden k de x* y se representa por $\sqrt[k]{x}$ o por $x^{1/k}$.

Se verifica que $\sqrt[k]{xy} = \sqrt[k]{x}\,\sqrt[k]{y}$.

La función $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_o^+$. Es decir, se verifica que $x < y \iff \sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$.

Raíces y potencias racionales

Dados un número real $x \geqslant 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, hay un único número real ***mayor o igual que cero***, $z \geqslant 0$, que verifica que $z^k = x$.Dicho número real z se llama la *raíz k-ésima o de orden k de x* y se representa por $\sqrt[k]{x}$ o por $x^{1/k}$.

Se verifica que $\sqrt[k]{xy} = \sqrt[k]{x}\,\sqrt[k]{y}$.

La función $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_o^+$. Es decir, se verifica que $x < y \iff \sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$.

Si $x < 0$ y k es ***impar*** se define $\sqrt[k]{x} = -\sqrt[k]{|x|}$.

Raíces y potencias racionales

Dados un número real $x \geqslant 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, hay un único número real ***mayor o igual que cero***, $z \geqslant 0$, que verifica que $z^k = x$.Dicho número real z se llama la *raíz k-ésima o de orden k de x* y se representa por $\sqrt[k]{x}$ o por $x^{1/k}$.

Se verifica que $\sqrt[k]{xy} = \sqrt[k]{x}\,\sqrt[k]{y}$.

La función $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_o^+$. Es decir, se verifica que $x < y \iff \sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$.

Si $x < 0$ y k es ***impar*** se define $\sqrt[k]{x} = -\sqrt[k]{|x|}$.

Si r es un número racional, $r = \dfrac{p}{q}$ donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, definimos para todo $x > 0$:

$$\boxed{x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}}$$

Logaritmos

Dados un número $a > 0$, $a \neq 1$, y un número $x > 0$, se define el *logaritmo en base a de x* como el único número $y \in \mathbb{R}$ que verifica la igualdad $a^y = x$. El logaritmo en base a de x se representa por el símbolo $\log_a x$.

Logaritmos

Dados un número $a > 0$, $a \neq 1$, y un número $x > 0$, se define el *logaritmo en base a de* x como el único número $y \in \mathbb{R}$ que verifica la igualdad $a^y = x$. El logaritmo en base a de x se representa por el símbolo $\log_a x$.

Observa que, por definición, para todo $x > 0$ es $\boxed{a^{\log_a x} = x}$.

Logaritmos

Dados un número $a > 0$, $a \neq 1$, y un número $x > 0$, se define el *logaritmo en base a de x* como el único número $y \in \mathbb{R}$ que verifica la igualdad $a^y = x$. El logaritmo en base a de x se representa por el símbolo $\log_a x$.

Observa que, por definición, para todo $x > 0$ es $\boxed{a^{\log_a x} = x}$.

El dominio de la función $\log_a$ es $\mathbb{R}^+$, y su imagen es $\mathbb{R}$. La función es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $a < 1$.

Logaritmos

Dados un número $a > 0$, $a \neq 1$, y un número $x > 0$, se define el *logaritmo en base a de x* como el único número $y \in \mathbb{R}$ que verifica la igualdad $a^y = x$. El logaritmo en base a de x se representa por el símbolo $\log_a x$.

Observa que, por definición, para todo $x > 0$ es $\boxed{a^{\log_a x} = x}$.

El dominio de la función $\log_a$ es $\mathbb{R}^+$, y su imagen es $\mathbb{R}$. La función es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $a < 1$.

La propiedad básica de los logaritmos es que convierten productos en sumas:

$$\boxed{\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y}$$

Logaritmos decimales y naturales o neperianos

Los *logaritmos decimales* corresponden a tomar $a = 10$ y los *logaritmos naturales*, también llamados *neperianos*, corresponden a tomar como base el número e.

Logaritmos decimales y naturales o neperianos

Los *logaritmos decimales* corresponden a tomar $a = 10$ y los *logaritmos naturales*, también llamados *neperianos*, corresponden a tomar como base el número e.

El número e es un número irracional. Un valor aproximado de e es 2.7182818284.

Logaritmos decimales y naturales o neperianos

Los *logaritmos decimales* corresponden a tomar $a = 10$ y los *logaritmos naturales*, también llamados *neperianos*, corresponden a tomar como base el número e.

El número e es un número irracional. Un valor aproximado de e es 2.7182818284.

En esta asignatura trabajaremos siempre con la función logaritmo natural que notaremos ln.

Logaritmos decimales y naturales o neperianos

Los *logaritmos decimales* corresponden a tomar $a = 10$ y los *logaritmos naturales*, también llamados *neperianos*, corresponden a tomar como base el número e.

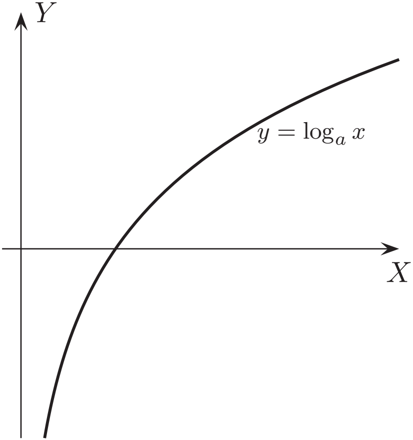
El número e es un número irracional. Un valor aproximado de e es 2.7182818284.

En esta asignatura trabajaremos siempre con la función logaritmo natural que notaremos ln.

Teniendo en cuenta que:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

podemos deducir muy fácilmente las propiedades de la función logaritmo en base a a partir de las propiedades de la función logaritmo natural.



Función logaritmo de base $a > 1$

Funciones exponenciales

La función inversa de la función $\log_a$ es la función exponencial de base a, esto es, la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ hace corresponder el número a^x. Tenemos que:

Funciones exponenciales

La función inversa de la función $\log_a$ es la función exponencial de base a, esto es, la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ hace corresponder el número a^x. Tenemos que:

$$\boxed{\log_a(a^x) = x \quad x \in \mathbb{R}}$$

Funciones exponenciales

La función inversa de la función $\log_a$ es la función exponencial de base a, esto es, la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ hace corresponder el número a^x. Tenemos que:

$$\boxed{\log_a(a^x) = x \quad x \in \mathbb{R}}$$

La propiedad básica de las exponenciales es que convierten sumas en productos:

$$\boxed{a^{x+y} = a^x a^y}$$

Funciones exponenciales

La función inversa de la función $\log_a$ es la función exponencial de base a, esto es, la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ hace corresponder el número a^x. Tenemos que:

$$\boxed{\log_a(a^x) = x \quad x \in \mathbb{R}}$$

La propiedad básica de las exponenciales es que convierten sumas en productos:

$$\boxed{a^{x+y} = a^x a^y}$$

La función exponencial de base e, inversa de la función logaritmo natural, se llama *función exponencial natural* o, simplemente, *función exponencial*.

Funciones exponenciales

La función inversa de la función $\log_a$ es la función exponencial de base a, esto es, la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ hace corresponder el número a^x. Tenemos que:

$$\boxed{\log_a(a^x) = x \quad x \in \mathbb{R}}$$

La propiedad básica de las exponenciales es que convierten sumas en productos:

$$\boxed{a^{x+y} = a^x a^y}$$

La función exponencial de base e, inversa de la función logaritmo natural, se llama *función exponencial natural* o, simplemente, *función exponencial*.Tenemos que:

$$\boxed{x^y = \mathrm{e}^{y \ln x} \quad x \in \mathbb{R}^+,\ y \in \mathbb{R}}$$

Funciones exponenciales

La función inversa de la función $\log_a$ es la función exponencial de base a, esto es, la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ hace corresponder el número a^x. Tenemos que:

$$\boxed{\log_a(a^x) = x \quad x \in \mathbb{R}}$$

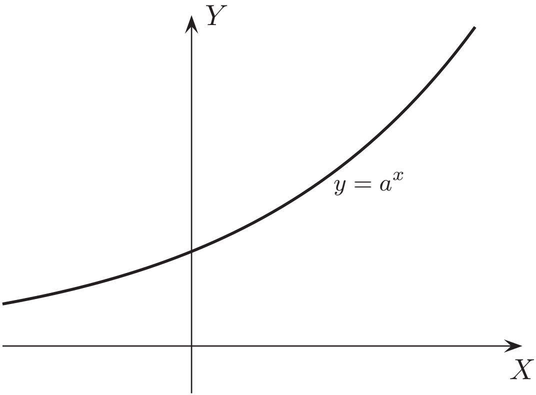
La propiedad básica de las exponenciales es que convierten sumas en productos:

$$\boxed{a^{x+y} = a^x a^y}$$

La función exponencial de base e, inversa de la función logaritmo natural, se llama *función exponencial natural* o, simplemente, *función exponencial*.Tenemos que:

$$\boxed{x^y = e^{y \ln x} \quad x \in \mathbb{R}^+, \ y \in \mathbb{R}}$$

El dominio de la función exponencial de base a es $\mathbb{R}$, y su imagen es $\mathbb{R}^+$. Es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $a < 1$.



Función exponencial de base $a > 1$

Estrategias

Una desigualdad es equivalente a la desigualdad del mismo sentido que resulta de tomar logaritmos o exponenciales en ambos lados de la misma.

Estrategias

Una desigualdad es equivalente a la desigualdad del mismo sentido que resulta de tomar logaritmos o exponenciales en ambos lados de la misma.

Para probar que dos cantidades son iguales es suficiente probar que sus logaritmos o sus exponenciales son iguales.

Función potencia de exponente real a

Se llama así la función cuyo dominio es $\mathbb{R}^+$ que a cada $x > 0$ asigna el número x^a.

Función potencia de exponente real a

Se llama así la función cuyo dominio es $\mathbb{R}^+$ que a cada $x > 0$ asigna el número x^a.

Puesto que

$$x^a = e^{a \ln x}$$

las propiedades de esta función se deducen con facilidad de las propiedades de las funciones exponencial y logaritmo natural.

Medida de ángulos

Para medir ángulos suelen usarse dos unidades de medida.

Medida de ángulos

Para medir ángulos suelen usarse dos unidades de medida.

Medida de ángulos en grados. Se toma como unidad de medida un arco cuya longitud sea igual a la longitud total de la circunferencia dividida por 360.

Medida de ángulos

Para medir ángulos suelen usarse dos unidades de medida.

Medida de ángulos en grados. Se toma como unidad de medida un arco cuya longitud sea igual a la longitud total de la circunferencia dividida por 360.Un ángulo de un grado es el que intercepta en una circunferencia de radio r un arco cuya longitud es igual a $\dfrac{2\pi r}{360}$.

Medida de ángulos

Para medir ángulos suelen usarse dos unidades de medida.

Medida de ángulos en grados. Se toma como unidad de medida un arco cuya longitud sea igual a la longitud total de la circunferencia dividida por 360.Un ángulo de un grado es el que intercepta en una circunferencia de radio r un arco cuya longitud es igual a $\dfrac{2\pi r}{360}$.

Medida de ángulos en radianes. Se toma como unidad de medida un arco cuya longitud sea igual a la del radio.

Medida de ángulos

Para medir ángulos suelen usarse dos unidades de medida.

Medida de ángulos en grados. Se toma como unidad de medida un arco cuya longitud sea igual a la longitud total de la circunferencia dividida por 360.Un ángulo de un grado es el que intercepta en una circunferencia de radio r un arco cuya longitud es igual a $\dfrac{2\pi r}{360}$.

Medida de ángulos en radianes. Se toma como unidad de medida un arco cuya longitud sea igual a la del radio.Un ángulo de un radián es el que intercepta en una circunferencia de radio r un arco cuya longitud es igual a r.

La relación entre grados y radianes viene dada por:

$$360 \text{ grados} = 2\pi \text{ radianes}$$

La relación entre grados y radianes viene dada por:

$$360 \text{ grados} = 2\pi \text{ radianes}$$

Grados y *radianes* no son otra cosa que *unidades de medida* de longitudes, al igual que lo son el metro y el centímetro.

La relación entre grados y radianes viene dada por:

$$360 \text{ grados} = 2\pi \text{ radianes}$$

Grados y *radianes* no son otra cosa que *unidades de medida* de longitudes, al igual que lo son el metro y el centímetro.

La ventaja de medir arcos en radianes es que, en tal caso, la misma unidad con la que medimos el radio nos sirve para medir arcos.

La relación entre grados y radianes viene dada por:

$$360 \text{ grados} = 2\pi \text{ radianes}$$

Grados y *radianes* no son otra cosa que *unidades de medida* de longitudes, al igual que lo son el metro y el centímetro.

La ventaja de medir arcos en radianes es que, en tal caso, la misma unidad con la que medimos el radio nos sirve para medir arcos.

En esta asignatura, salvo indicación contraria, supondremos que los ángulos están medidos en radianes.

¿Seno de ángulos o de números?

Hay dos funciones que suelen confundirse: el seno de un ángulo y el seno de un número. ¿Qué relación hay entre una y otra?

¿Seno de ángulos o de números?

Hay dos funciones que suelen confundirse: el seno de un ángulo y el seno de un número. ¿Qué relación hay entre una y otra?

Antes que nada hay que decir que tanto el seno de un ángulo como el seno de un número *son números*, pero mientras que el seno de un ángulo tiene una sencilla definición geométrica, no es evidente, a priori, cómo se puede definir el seno de un número.

¿Seno de ángulos o de números?

Hay dos funciones que suelen confundirse: el seno de un ángulo y el seno de un número. ¿Qué relación hay entre una y otra?

Antes que nada hay que decir que tanto el seno de un ángulo como el seno de un número *son números*, pero mientras que el seno de un ángulo tiene una sencilla definición geométrica, no es evidente, a priori, cómo se puede definir el seno de un número.

La idea consiste en asociar a cada número un (único) ángulo y definir el seno del número como el seno del ángulo que le corresponde.

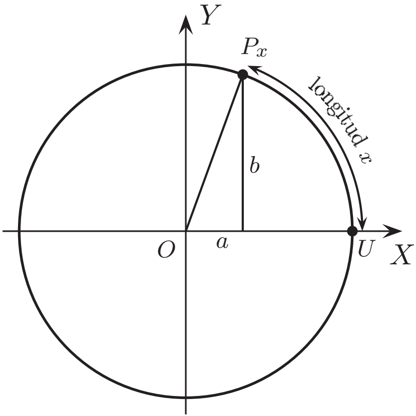
A cada número $x \geqslant 0$ le podemos asignar de manera única un ángulo “enrollando” el segmento $[0, x]$ sobre la circunferencia unidad, *en sentido contrario a las agujas del reloj*, de forma que el origen de dicho segmento coincida con el punto $U = (1, 0)$ de la circunferencia. Obtenemos así un punto P_x de la circunferencia unidad.

A cada número $x \geqslant 0$ le podemos asignar de manera única un ángulo “enrollando” el segmento $[0, x]$ sobre la circunferencia unidad, *en sentido contrario a las agujas del reloj*, de forma que el origen de dicho segmento coincida con el punto $U = (1, 0)$ de la circunferencia. Obtenemos así un punto P_x de la circunferencia unidad.

Pues bien, si las coordenadas de P_x son (a, b), se define:

$$\operatorname{sen} x = \text{seno del ángulo}(\widehat{P_x O U}) = b$$

$$\cos x = \text{coseno del ángulo}(\widehat{P_x O U}) = a$$



La circunferencia unidad

Al ser 2π la longitud de la circunferencia unidad, es claro que $P_{x+2\pi} = P_x$, por lo que $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$ y $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$.

Al ser 2π la longitud de la circunferencia unidad, es claro que $P_{x+2\pi} = P_x$, por lo que $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$ y $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$.

Observa que si $0 \leqslant x < 2\pi$, entonces la *medida en radianes* del ángulo $\widehat{P_x OU}$ es igual a x, es decir:

$$\operatorname{sen}(x) = \text{ seno del ángulo de } x \text{ radianes } \ (0 \leqslant x < 2\pi)$$

Si $x < 0$ podemos proceder con el segmento $[x, 0]$ de forma análoga a la anterior, con la diferencia de que ahora enrollamos dicho segmento sobre la circunferencia unidad *en el sentido de las agujas del reloj*, de forma que su extremo 0 coincida con el punto $U = (1, 0)$ de la circunferencia.

Si $x < 0$ podemos proceder con el segmento $[x, 0]$ de forma análoga a la anterior, con la diferencia de que ahora enrollamos dicho segmento sobre la circunferencia unidad *en el sentido de las agujas del reloj*, de forma que su extremo 0 coincida con el punto $U = (1, 0)$ de la circunferencia.

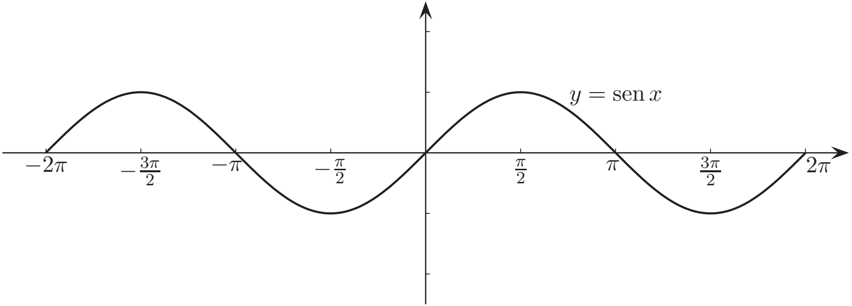
Obtenemos así un punto $P_x = (c, d)$ de la circunferencia unidad y se define, igual que antes $\operatorname{sen}(x) = d$, $\cos(x) = c$.

Si $x < 0$ podemos proceder con el segmento $[x, 0]$ de forma análoga a la anterior, con la diferencia de que ahora enrollamos dicho segmento sobre la circunferencia unidad *en el sentido de las agujas del reloj*, de forma que su extremo 0 coincida con el punto $U = (1, 0)$ de la circunferencia.

Obtenemos así un punto $P_x = (c, d)$ de la circunferencia unidad y se define, igual que antes $\operatorname{sen}(x) = d$, $\cos(x) = c$.

Es fácil ver que si $P_x = (c, d)$, entonces $P_{-x} = (c, -d)$. Resulta así que $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x)$ y $\cos(x) = \cos(-x)$.

La función seno



La función seno

¿En sen(x) está x en grados o en radianes?

Podemos definir la función *seno en grados* sin más que interpretar que x es la medida en grados del ángulo que le corresponde. Para indicar el seno del ángulo cuya medida en grados es x es frecuente escribir sen(x^{o}).

¿En $\operatorname{sen}(x)$ está x en grados o en radianes?

Podemos definir la función *seno en grados* sin más que interpretar que x es la medida en grados del ángulo que le corresponde. Para indicar el seno del ángulo cuya medida en grados es x es frecuente escribir $\operatorname{sen}(x^{o})$.

Naturalmente, la relación entre el *seno en grados* y la función seno usual viene dada por:

$$\operatorname{sen}(x^{o}) = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{180}$$

¿En $\operatorname{sen}(x)$ está x en grados o en radianes?

Podemos definir la función *seno en grados* sin más que interpretar que x es la medida en grados del ángulo que le corresponde. Para indicar el seno del ángulo cuya medida en grados es x es frecuente escribir $\operatorname{sen}(x^{\mathrm{o}})$.

Naturalmente, la relación entre el *seno en grados* y la función seno usual viene dada por:

$$\operatorname{sen}(x^{\mathrm{o}}) = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{180}$$

En esta asignatura el número $\operatorname{sen} x$ significará siempre el seno del ángulo cuya medida en radianes (salvo múltiplos enteros de 2π) es x.

Propiedades de las funciones seno y coseno

Las funciones seno y coseno son funciones reales cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$.

Propiedades de las funciones seno y coseno

Las funciones seno y coseno son funciones reales cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$.Dichas funciones verifican que:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Propiedades de las funciones seno y coseno

Las funciones seno y coseno son funciones reales cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$.Dichas funciones verifican que:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x\,, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Propiedades de las funciones seno y coseno

Las funciones seno y coseno son funciones reales cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$.Dichas funciones verifican que:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x\,, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

La función seno es impar y la función coseno es par:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x\,, \quad \cos(-x) = \cos x$$

Propiedades de las funciones seno y coseno

Las funciones seno y coseno son funciones reales cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$.Dichas funciones verifican que:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \,, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

La función seno es impar y la función coseno es par:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \,, \quad \cos(-x) = \cos x$$

Las siguientes igualdades, se conocen como *fórmulas de adición*:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x + y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

Propiedades de las funciones seno y coseno

Las funciones seno y coseno son funciones reales cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$.Dichas funciones verifican que:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x\,, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

La función seno es impar y la función coseno es par:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x\,, \quad \cos(-x) = \cos x$$

Las siguientes igualdades, se conocen como *fórmulas de adición*:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x + y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

La función seno se anula en los números de la forma $k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. La función coseno se anula en los puntos de la forma $k\pi + \pi/2$ donde $k \in \mathbb{Z}$.

Tangente, cotangente, secante y cosecante

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \ \sec x = \frac{1}{\cos x}, \ \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \ \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Tangente, cotangente, secante y cosecante

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \ \sec x = \frac{1}{\cos x}, \ \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \ \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Estas funciones están definidas en todo punto donde los denominadores respectivos no se anulan.

Tangente, cotangente, secante y cosecante

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Estas funciones están definidas en todo punto donde los denominadores respectivos no se anulan.

Las propiedades de estas funciones se deducen fácilmente de las propiedades del seno y del coseno.

Tangente, cotangente, secante y cosecante

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Estas funciones están definidas en todo punto donde los denominadores respectivos no se anulan.

Las propiedades de estas funciones se deducen fácilmente de las propiedades del seno y del coseno.

Por ejemplo, $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x + \pi)$; esto es, la función tangente es periódica de período π.

Las funciones trigonométricas inversas

Ninguna de las funciones “seno”, “coseno”, “tangente”, es inyectiva pues todas ellas son periódicas y, por tanto, toman cada uno de sus valores en infinitos puntos; en consecuencia, ninguna de ellas tiene inversa.

Las funciones trigonométricas inversas

Ninguna de las funciones “seno”, “coseno”, “tangente”, es inyectiva pues todas ellas son periódicas y, por tanto, toman cada uno de sus valores en infinitos puntos; en consecuencia, ninguna de ellas tiene inversa.

Por tanto, no debe decirse que las funciones *arcoseno*, *arcocoseno*, *arcotangente* sean las funciones inversas del seno, del coseno o de la tangente: eso no es cierto. Hecha esta observación imprescindible, pasemos a definir dichas funciones.

La función arcoseno

La función seno es estrictamente creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$ y en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1, $\operatorname{sen}([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$.

La función arcoseno

La función seno es estrictamente creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$ y en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1, $\operatorname{sen}([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$.

En consecuencia, dado un número $x \in [-1, 1]$ hay un único número $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\operatorname{sen} y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arcsen} x$ y se llama el *arcoseno de* x

La función arcoseno

La función seno es estrictamente creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$ y en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1, $\operatorname{sen}([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$.

En consecuencia, dado un número $x \in [-1, 1]$ hay un único número $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\operatorname{sen} y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arcsen} x$ y se llama el *arcoseno de x*

Es decir, el arcoseno es la función $\operatorname{arcsen}\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ y $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arcsen} x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

La función arcoseno

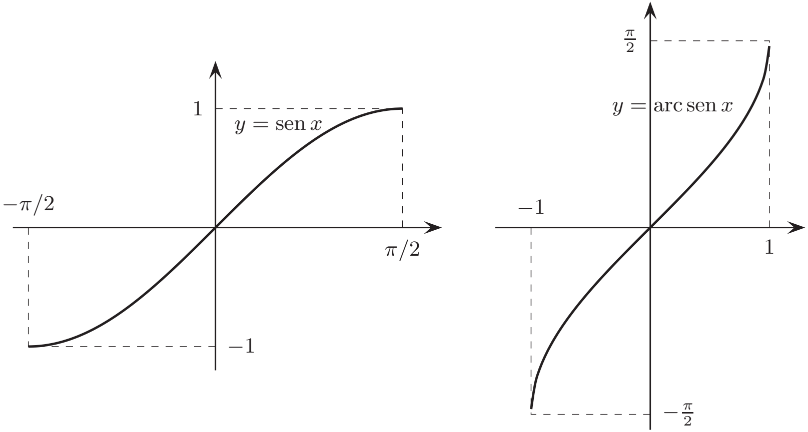
La función seno es estrictamente creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$ y en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1, $\operatorname{sen}([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$.

En consecuencia, dado un número $x \in [-1, 1]$ hay un único número $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\operatorname{sen} y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arcsen} x$ y se llama el *arcoseno de x*

Es decir, el arcoseno es la función $\operatorname{arcsen} \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ y $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arcsen} x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}}$$

La función arcoseno



La función arcocoseno

La función coseno es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, \pi]$ y en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1.

La función arcocoseno

La función coseno es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, \pi]$ y en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1.

Por tanto, dado un número $x \in [-1, 1]$, hay un único número $y \in [0, \pi]$ tal que $\cos y = x$; dicho número y se representa por $\arccos x$ y se llama *arcocoseno de* x.

La función arcocoseno

La función coseno es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, \pi]$ y en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1.

Por tanto, dado un número $x \in [-1, 1]$, hay un único número $y \in [0, \pi]$ tal que $\cos y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arccos} x$ y se llama *arcocoseno de x*.

Es decir, arcocoseno es la función $\operatorname{arccos} \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $\cos(\operatorname{arccos} x) = x$ y $0 \leqslant \operatorname{arccos} x \leqslant \pi$.

La función arcocoseno

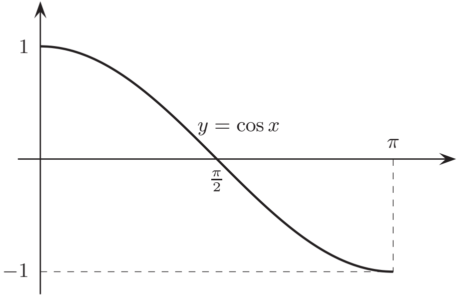
La función coseno es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, \pi]$ y en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1.

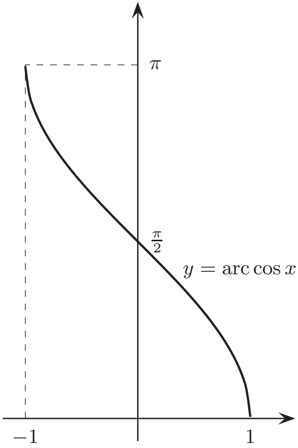
Por tanto, dado un número $x \in [-1, 1]$, hay un único número $y \in [0, \pi]$ tal que $\cos y = x$; dicho número y se representa por $\arccos x$ y se llama *arcocoseno de* x.

Es decir, arcocoseno es la función $\arccos\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $\cos(\arccos x) = x$ y $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$.

$$\boxed{\arccos(\cos x) = x \iff 0 \leqslant x \leqslant \pi}$$

La función arcocoseno





La función arcotangente

La función tangente es estrictamente creciente en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ y en dicho intervalo toma todos los valores reales, $\operatorname{tg}(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbb{R}$.

La función arcotangente

La función tangente es estrictamente creciente en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ y en dicho intervalo toma todos los valores reales, $\operatorname{tg}(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbb{R}$.

En consecuencia, dado un número $x \in \mathbb{R}$, hay un único número $y \in]-\pi/2, \pi/2[$ tal que $\operatorname{tg} y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arctg} x$ y se llama el *arcotangente de* x.

La función arcotangente

La función tangente es estrictamente creciente en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ y en dicho intervalo toma todos los valores reales, $\operatorname{tg}(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbb{R}$.

En consecuencia, dado un número $x \in \mathbb{R}$, hay un único número $y \in]-\pi/2, \pi/2[$ tal que $\operatorname{tg} y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arctg} x$ y se llama el *arcotangente de x*.

$$\boxed{\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad -\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x}$$

La función arcotangente

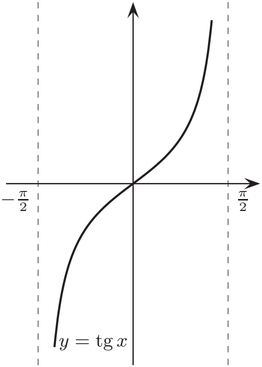
La función tangente es estrictamente creciente en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ y en dicho intervalo toma todos los valores reales, $\operatorname{tg}(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbb{R}$.

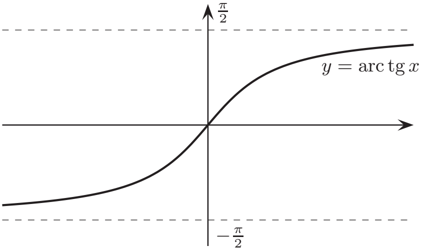
En consecuencia, dado un número $x \in \mathbb{R}$, hay un único número $y \in]-\pi/2, \pi/2[$ tal que $\operatorname{tg} y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arctg} x$ y se llama el *arcotangente de* x.

$$\boxed{\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad -\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x}$$

$$\boxed{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad -\pi/2 < x < \pi/2}$$

La función arcotangente





Las funciones seno y coseno hiperbólicos

Las funciones *seno hiperbólico*, representada por senh, y *coseno hiperbólico*, representada por cosh, están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\boxed{\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

Las funciones seno y coseno hiperbólicos

Las funciones *seno hiperbólico*, representada por senh, y *coseno hiperbólico*, representada por cosh, están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\boxed{\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

La identidad básica que dichas funciones verifican es:

$$\boxed{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1}$$

Las funciones seno y coseno hiperbólicos

Las funciones *seno hiperbólico*, representada por senh, y *coseno hiperbólico*, representada por cosh, están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\boxed{\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

La identidad básica que dichas funciones verifican es:

$$\boxed{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1}$$

La función seno hiperbólico es impar y la función coseno hiperbólico es par:

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x\,, \quad \cosh(-x) = \cosh x \quad (x \in \mathbb{R})$$

Las funciones seno y coseno hiperbólicos

Las funciones *seno hiperbólico*, representada por senh, y *coseno hiperbólico*, representada por cosh, están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\boxed{\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

La identidad básica que dichas funciones verifican es:

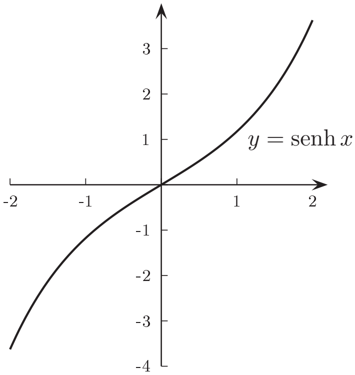
$$\boxed{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1}$$

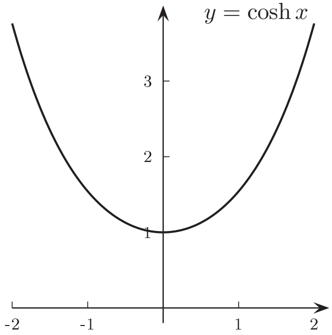
La función seno hiperbólico es impar y la función coseno hiperbólico es par:

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x\,, \quad \cosh(-x) = \cosh x \quad (x \in \mathbb{R})$$

La función seno hiperbólico es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. La función coseno hiperbólico es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_o^+$.

Seno y coseno hiperbólicos





La función tangente hiperbólica

Se representa por tgh y es la función definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\boxed{\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$$

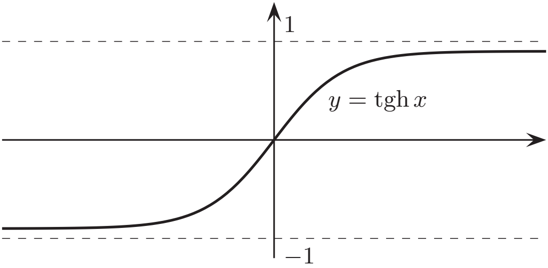
La función tangente hiperbólica

Se representa por tgh y es la función definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\boxed{\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$$

De forma análoga se definen las funciones cotangente, secante y cosecante hiperbólicas.

La función tangente hiperbólica



Las funciones hiperbólicas inversas

La función seno hiperbólico es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ cuya inversa, representada por, argsenh, (léase **argumento seno hiperbólico**) viene dada por:

$$\boxed{\operatorname{argsenh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \quad (x \in \mathbb{R})}$$

Las funciones hiperbólicas inversas

La función seno hiperbólico es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ cuya inversa, representada por, argsenh, (léase **argumento seno hiperbólico**) viene dada por:

$$\boxed{\operatorname{argsenh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \quad (x \in \mathbb{R})}$$

La función coseno hiperbólico es inyectiva en $\mathbb{R}_o^+$ y su imagen es $[1, +\infty[$. La función que a cada $x \geqslant 1$ asigna el único número $y \geqslant 0$ tal que $\cosh y = x$, se llama **argumento coseno hiperbólico**, se representa por, argcosh, y viene dada por:

$$\boxed{\operatorname{argcosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad (x \geqslant 1)}$$

Las funciones hiperbólicas inversas

La función seno hiperbólico es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ cuya inversa, representada por, argsenh, (léase **argumento seno hiperbólico**) viene dada por:

$$\boxed{\operatorname{argsenh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \quad (x \in \mathbb{R})}$$

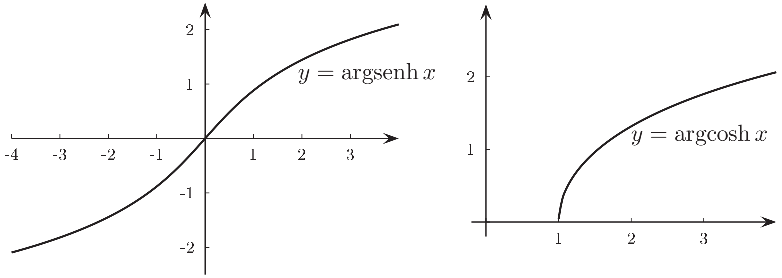
La función coseno hiperbólico es inyectiva en $\mathbb{R}_o^+$ y su imagen es $[1, +\infty[$. La función que a cada $x \geqslant 1$ asigna el único número $y \geqslant 0$ tal que $\cosh y = x$, se llama **argumento coseno hiperbólico**, se representa por, argcosh, y viene dada por:

$$\boxed{\operatorname{argcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (x \geqslant 1)}$$

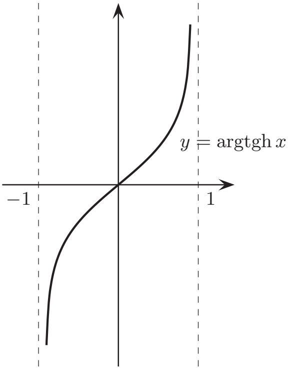
La función tangente hiperbólica es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $]-1, 1[$ cuya inversa, representada por, argtgh, (léase **argumento tangente hiperbólica**) es la función definida en $]-1, 1[$ por:

$$\boxed{\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1)}$$

Argumento seno hiperbólico y argumento coseno hiperbólico



Argumento tangente hiperbólica



Ejercicios propuestos

1. Estudia cuales de las siguientes igualdades son ciertas, y cuando no lo sean proporciona un contraejemplo. Se supone que f, g, h son funciones definidas en $\mathbb{R}$.
   a) $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$.
   b) $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$.
   c) $\dfrac{1}{f \circ g} = \dfrac{1}{f} \circ g$.
   d) $\dfrac{1}{f \circ g} = f \circ \dfrac{1}{g}$.
2. Una función f es *par* si $f(-x) = f(x)$ e *impar* si $f(-x) = -f(x)$.
   a) Estudia si la suma, el producto y la composición de funciones pares o impares es una función par o impar. Considera todos los casos posibles.
   b) Prueba que toda función puede escribirse de forma única como suma de una función par y una función impar.
3. Prueba que la función $f : [1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - x + 1$ para todo $x \geqslant 1/2$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de f.
4. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{\log \dfrac{x^2 - 8x + 4}{x^2 - 3x + 2}}$.

Ejercicios propuestos

5. a) Compara $a^{\ln b}$ con $b^{\ln a}$.
   b) Simplifica las expresiones $a^{\ln(\ln a)/\ln a}$, $\log_a(\log_a(a^{a^x}))$.
   c) Calcula x sabiendo que:

$$\frac{1}{\log_x(a)} = \frac{1}{\log_b(a)} + \frac{1}{\log_c(a)} + \frac{1}{\log_d(a)}.$$

6. Prueba las igualdades siguientes.

$$\begin{aligned}
\cos(\operatorname{arctg} x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
\tan(\operatorname{arcsen} x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[\\
\arccos x + \operatorname{arcsen} x &= \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1,1] \\
\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1/x) &= \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

7. Dado $x \in \mathbb{R}$ prueba que hay un único $t \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = x$.
   Sugerencia. Lo que tienes que hacer es calcular t. La sustitución $e^t = u$ te permitirá calcular u.